Томъ II. Листъ 13.

ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 37.

I.

О ПРЕОБРАЗОВАНІИ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ВЪ КРАТНЫЕ И ОБРАТНО.

1. Преобразованіе нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ въ кратные приводитъ иногда къ довольно замѣчательнымъ формуламъ. Такъ напр. разсматривая опредѣленный интегралъ:

$$U=\int_0^\infty \frac{x^{r-1} f(x)\, dx}{(1+a_1 x)^{p_1}(1+a_2 x)^{p_2}(1+a_3 x)^{p_3}\ldots}$$

и замѣчая что:

$$\frac{1}{(1+a_1 x)^{p_1}}=\frac{1}{\Gamma(p_1)}\int_0^\infty e^{-(1+a_1 x)\,\theta_1}\,\theta_1^{p_1-1}\,d\theta_1\,,$$

$$\frac{1}{(1+a_2 x)^{p_2}}=\frac{1}{\Gamma(p_2)}\int_0^\infty e^{-(1+a_2 x)\,\theta_2}\,\theta_2^{p_2-1}\,d\theta_2\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

получимъ:

$$U=\frac{1}{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\,\Gamma(p_3)\ldots}\int\int\int_0^\infty\ldots e^{-(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots)-(a_1\theta_1+a_2\theta_2+a_3\theta_3+\ldots)\,x}\;x^{r-1}\,\theta_1^{p_1-1}\,\theta_2^{p_2-1}\,\theta_3^{p_3-1}\ldots dx\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3\ldots$$

или полагая:

$$\theta_1=\frac{z_1}{x}\,,\quad \theta_2=\frac{z_2}{x}\,,\quad \theta_3=\frac{z_3}{x}\ldots;\quad x=\frac{z_1+z_2+z_3+\ldots}{y}\,,$$

будемъ имѣть:

$$U=\frac{1}{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\,\Gamma(p_3)\ldots}\int\!\!\int_0^\infty\!\!\int\ldots e^{-y-a_1 z_1+a_2 z_2+a_3 z_3+\ldots)}\cdot z_1^{p_1-1}\,z_2^{p_2-1}\,z_3^{p_3-1}\ldots f\left(\frac{z_1+z_2+z_3+\ldots}{y}\right)\times$$

$$\times\frac{y^{p_1+p_2+p_3+\ldots-r-1}\,dz_1\,dz_2\,dz_3\ldots dy}{(z_1+z_2+z_3+\ldots)^{p_1+p_2+\ldots-r}}\,.$$

Или полагая еще:

$$z_1=yx_1\;,\quad z_2=yx_2\;,\quad z_3=yx_3\;,\;\ldots$$

и интегрируя въ отношенiи y, получимъ:

$$U=\frac{\Gamma(p_1+p_2+p_3+\ldots)}{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\,\Gamma(p_3)\ldots)}\int\!\!\int_0^\infty\!\!\int\ldots\frac{x_1^{p_1-1}\,x_2^{p_2-1}\,x_3^{p_3-1}\ldots f(x_1+x_2+x_3+\ldots)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots}{(x_1+x_2+x_3+\ldots)^{p_1+p_2+p_3+\ldots-r}\,(1+a_1 x_1+a_2 x_2+\ldots)^{p_1+p_2+p_3+\ldots}};$$

а слѣдовательно

$$\int\!\!\int_0^\infty\!\!\int\ldots\frac{x_1^{p_1-1}\,x_2^{p_2-1}\,x_3^{p_3-1}\ldots f(x_1+x_2+x_3+\ldots)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots}{x_1+x_2+x_3+\ldots)^{p_1+p_2+p_3+\ldots-r}\,(1+a_1 x_1+a_2 x_2+\ldots)^{p_1+p_2+p_3+\ldots}}=$$

(I).

$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\,\Gamma(p_3)\ldots}{\Gamma(p_1+p_2+p_3+\ldots)}\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,f(x)\,dx}{(1+a_1 x)^{p_1}\,(1+a_2 x)^{p_2}\,(1+a_3 x)^{p_3}\ldots}\,.$$

Полагая въ этой формулѣ:

$$r=p_1+p_2+p_3+\ldots,$$

получимъ формулу, найденную Шлёмильхомъ (*), а именно:

$$\int\!\!\int_0^\infty\!\!\int\ldots\frac{x_1^{p_1-1}\,x_2^{p_2-1}\,x_3^{p_3-1}\ldots f(x_1+x_2+x_3+\ldots)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots}{(1+a_1 x_1+a_2 x_2+a_3 x_3+\ldots)^{p_1+p_2+p_3+\ldots}}=$$

(II).

$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\,\Gamma(p_3)\ldots}{\Gamma(p_1+p_2+p_3\ldots)}\int_0^\infty\frac{x^{p_1+p_2+p_3+\ldots-1}\,f(x)\,dx}{(1+a_1 x)^{p_1}\,(1+a_2 x)^{p_2}\,(1+a_3 x)^{p_3}\ldots}\,.$$

Подобнымъ же образомъ, разсматривая опредѣленный интегралъ:

$$\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,f(x)\,dx}{1+a_1 x+\beta_1 x^2)^{p_1}\,(1+a_2 x+\beta_2 x^2)^{p_2}\ldots},$$

получимъ:

$$\int\!\!\int_0^\infty\!\!\int\ldots\frac{x_1^{p_1-1}\,x_2^{p_2-1}\ldots f(x_1+x_2+\ldots)\,dx_1\,dx_2\ldots}{x_1+x_2+\ldots)^{p_1+p_2+\ldots-r}\,[1+a_1 x_1+a_2 x_2+\ldots+(x_1+x_2+\ldots)(\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\ldots)]^{p_1+p_2+\ldots}}=$$

(III).

$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots)}\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,f(x)\,dx}{(1+a_1 x+\beta_1 x^2)^{p_1}\,(1+a_2 x+\beta_2 x^2)^{p_2}\ldots};$$

---

*) Journal de Mathématiques, par Liouville, 1857.

полагая же:

$$p_1 + p_2 + p_3 \ldots = r \quad , \quad a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a \quad , \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta \quad ,$$

находимъ:

$$\text{(IV)}. \int\!\!\int\!\!\int_0^\infty \cdots \frac{x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1} \ldots f(x_1 + x_2 + \ldots)\, dx_1\, dx_2 \ldots}{[1 + a\,(x_1 + x_2 + \ldots) + \beta\,(x_1 + x_2 + \ldots)^2]^r} = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{x^{r-1} f(x)\, dx}{(1 + ax + \beta x^2)^r}.$$

Если: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, то:

$$\int\!\!\int\!\!\int_0^\infty \cdots \frac{x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1} \ldots (x_1 + x_2 + \ldots)^{\frac{1}{2}}\, dx_1\, dx_2 \ldots}{[1 + a\,(x_1 + x_2 + \ldots) + \beta\,(x_1 + x_2 + \ldots)^2]^r} = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{x^{r-\frac{1}{2}}\, dx}{(1 + ax + \beta x^2)^r};$$

но замѣчая что

$$\int_0^\infty \frac{x^{r-\frac{1}{2}}\, dx}{(1 + ax + \beta x^2)^r} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(r - \frac{1}{2})}{\Gamma(r)} \frac{1}{(a + 2\sqrt{\beta})^r} \quad (*)$$

получимъ:

$$\text{(V)}. \int\!\!\int\!\!\int_0^\infty \cdots \frac{x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1} \ldots (x_1 + x_2 + \ldots)^{\frac{1}{2}}\, dx_1\, dx_2 \ldots}{[1 + a\,(x_1 + x_2 + \ldots) + \beta\,(x_1 + x_2 + \ldots)^2]^r} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(r - \frac{1}{2})}{\Gamma^2(r)}\, \frac{1}{(a + 2\sqrt{\beta})^r}$$

2. Формулы, найденныя нами въ предъидущемъ параграфѣ, могутъ служить для нахожденія значеній опредѣленныхъ интеграловъ. Такъ, полагая во II-ой формулѣ: $f(x) = 1$, получимъ:

$$\int\!\!\int\!\!\int_0^\infty \cdots \frac{x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1} \ldots dx_1\, dx_2 \ldots}{(1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots)^r} = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{x^{r-1}\, dx}{(1 + a_1 x)^{p_1} (1 + a_2 x)^{p_2} \ldots}.$$

гдѣ:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = r.$$

А умножая числителя и знаменателя на:

$$1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots$$

получимъ:

$$\int\!\!\int\!\!\int_0^\infty \cdots \frac{x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1} \ldots dx_1\, dx_2 \ldots}{(1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots)^{r+1}} + a_1 \int\!\!\int\!\!\int_0^\infty \cdots \frac{x_1^{p_1}\, x_2^{p_2-1} \ldots dx_1\, dx_2 \ldots}{(1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots)^{r+1}} +$$

$$+ a_2 \int\!\!\int\!\!\int_0^\infty \cdots \frac{x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2} \ldots dx_1\, dx_2 \ldots}{(1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots)^{r+1}} + \ldots = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{x^{r-1}\, dx}{(1 + a_1 x)^{p_1} (1 + a_2 x)^{p_2} \ldots},$$

или, вставляя значенія кратныхъ интеграловъ, будемъ имѣть:

(*) Journal de Mathématiques par Liouville, 1857 année p. 47 et suivantes.

$$\frac{\Gamma(p_1)\ \Gamma(p_2)\ldots}{\Gamma(r+1)\ a_1^{p_1}\ a_2^{p_2}\ldots}+a_1\frac{\Gamma(p_1+1)\ \Gamma(p_2)\ldots}{\Gamma(r+1)}\int_0^\infty\frac{x^r\,dx}{(1+a_1x)^{p_1+1}\ (1+a_1x)^{p_2}\ldots}+$$

$$+a_2\frac{\Gamma(p_1)\ \Gamma(p_2+1)\ldots}{\Gamma(r+1)}\int_0^\infty\frac{x^r\,dx}{(1+a_1x)^{p_1}\ (1+a_2x)^{p_2+1}\ldots}+\ldots=\frac{\Gamma(p_1)\ \Gamma(p_2)\ldots}{\Gamma(r)}\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,dx}{(1+a_1x)^{p_1}(1+a_2x)^{p_2}\ldots},$$

или:

$$\frac{1}{r\ a_1^{p_1}\ a_2^{p_2}\ldots}+\frac{a_1p_1}{r}\int_0^\infty\frac{x^r\,dx}{(1+a_1x)^{p_1+1}\ (1+a_2x)^{p_2}\ldots}+\frac{a_2p_2}{r}\int_0^\infty\frac{x^r\,dx}{(1+a_1x)^{p_1}\ (1+a_2x)^{p_2+1}\ldots}+\ldots=$$

$$=\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,dx}{(1+a_1x)^{p_1}\ (1+a_2x)^{p_2}\ldots},$$

Предполагая n множителей въ знаменателяхъ и прикладывая къ каждому интегралу 1-ой части:

$$\frac{p_1}{r}\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,dx}{(1+a_1x)^{p_1+1}\ (1+a_2x)^{p_2}\ldots}\ ,\qquad \frac{p_2}{r}\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,dx}{(1+a_1x)^{p_1}\ (1+a_2x)^{p_2+1}\ldots}\ \ldots,$$

получимъ:

$$\frac{1}{r\ a^{p_1}\ a^{p_2}\ldots}+\left[\frac{p_1}{r}+\frac{p_2}{r}+\ldots\right]\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,dx}{(1+a_1x)^{p_1}\ (1+a_2x)^{p_2}\ldots}=$$

$$=\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,dx}{(1+a_1x)^{p_1}\ (1+a_2x)^{p_2}\ldots}\left[1+\frac{1}{r}\left(\frac{p_1}{1+a_1x}+\frac{p_2}{1+a_2x}+\ldots\right)\right],$$

или, замѣчая что:

$$p_1+p_2+\ldots=r\ ,$$

находимъ:

$$\text{(VI)}\qquad\int_0^\infty\frac{x^{r-1}\,dx}{(1+a_1x)^{p_1}\ (1+a_2x)^{p_2}\ldots}\left[\frac{p_1}{1+a_1x}+\frac{p_2}{1+a_2x}+\ldots\right]=\frac{1}{a_1^{p_1}\ a_2^{p_2}\ldots}.$$

На основаніи этой формулы можно найти интегралъ такого дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{dU}{da_1}+\frac{dU}{da_2}+\frac{dU}{da_3}+\ldots=-\frac{1}{a_1^{p_1}\ a_2^{p_2}\ a_3^{p_3}\ldots}.$$

Въ самомъ дѣлѣ отсюда получимъ:

$$U=\int_0^\infty\frac{x^{r-2}\,dx}{(1+a_1x)^{p_1}\ (1+a_2x)^{p_2}\ldots}.$$

1862 г. 20-го Декабря.

Л. Изноковъ.

О преобразованіи суставчатаго параллелограмма Ватта,

П. Чебышева.

Извлечено изъ бюллетеня С. Петербургской Императорской академіи наукъ. Томъ III. 18/30 Октября 1861 года.

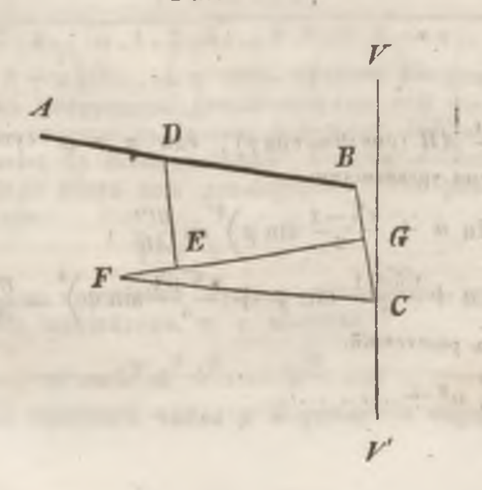
Механизмъ, извѣстный подъ именемъ суставчатаго парлограмма Ватта, представляетъ одно изъ рѣшеній слѣдующаго, весьма важнаго въ извѣстныхъ случаяхъ практики, вопроса:

Сочетаніемъ круговыхъ движеній произвести, съ достаточнымъ приближеніемъ, прямолинейное движеніе.

Не смотря на всю важность этого механизма для практики, понятно, что въ отношен и точности его хода, имѣя въ виду запутанность послѣдняго, остается еще многаго желать. Чтобы въ этомъ убѣдиться стоитъ лишь замѣтить, что парлограммъ Ватта даетъ тоже движеніе, какъ и механизмъ, называемый сокращеннымъ парлограммомъ Ватта (mecanisme à fléau), который въ своемъ составѣ содержитъ двумя брусками менѣе; а въ механизмахъ этого рода каждый новый элементъ очевидно есть новый источникъ для выполненія съ большею точностью ихъ хода. Стараясь произвести или помощью сокращеннаго, или помощью полнаго парлограмма Ватта движеніе, по возможности ближе подходящее къ прямолинейному, мы получаемъ овальное, приближающееся къ искомому прямолинейному, имѣя съ нимъ всего только пять общихъ элементовъ. Но подобная степень приближенія безсомнѣнія мала для такого сложнаго механизма, какъ парлограммъ Ватта, состоящій изъ четырехъ брусковъ, которыми можемъ располагать и изъ которыхъ каждый представляетъ два произвольные параметра, именно: *длину* и *направленіе*. Имѣя въ виду, что тутъ число произвольныхъ параметровъ 8, мы въ правѣ искать механизма, способнаго произвести движеніе, ближе подходящее къ искомому прямолинейному и имѣющее съ нимъ, вмѣсто пяти, восемь общихъ элементовъ, оставляя притомъ тоже число брусковъ, составляющихъ механизмъ.

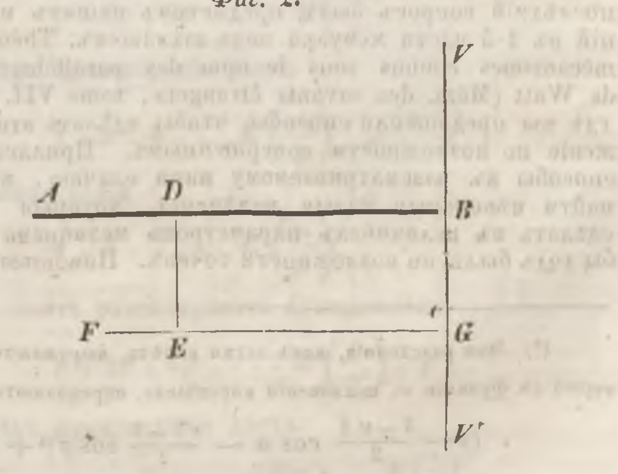
Это было предметомъ нашихъ изысканій и мы убѣдились, что достигнемъ желаемой цѣли, сочленяя между собою, посредствомъ шарнеровъ, четыре бруска и коромысло слѣдующимъ образомъ:

Фиг. 1.



Въ этой фигурѣ AB есть полу-коромысло, съ которымъ требуется соединить механизмъ, производящій безъ чувствительныхъ отклоненій прямолинейное движеніе по вертикали VV', проходящей черезъ конецъ B коромысла при горизонтальномъ его положеніи; BC, DE, CF, FG четыре бруска, составляющіе механизмъ; C точка, производящая требуемое движеніе; G неподвижная ось стержня FG, представляющаго, какъ и въ парлограмахъ Ватта, отводный радіусъ (un contre-balancier). Всѣ эти бруски сочленены между собою и съ коромысломъ, какъ въ парлограммѣ Ватта, съ тою только разницею, что стержни DE и FC не соединены болѣе между собою, но связаны, посредствомъ шарнеровъ, съ отводнымъ радіусомъ FG въ двухъ различныхъ точкахъ E и F. Составляя этотъ механизмъ, нужно брать бруски CF и FG равными $\frac{\sqrt{5}+1}{4}AB$, а разстоянія BD и EG равными $\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$; такимъ образомъ линія BD представитъ среднюю пропорціональную между всей линіей AB и ея частью AD, а линія EF будетъ половиною AD. Брускамъ BC и DE дадимъ одинаковую длину, которая можетъ быть выбрана произвольно, только, чтобы она не превосходила значительно величины полуразмаха точки C. Что касается точки G, центра качанія отводнаго радіуса FG, то её помѣщаютъ такимъ образомъ, чтобы при горизонтальномъ положеніи коромысла, бруски BC и DE были вертикальны, а брусья CF и FG приняли одинаковое горизонтальное положеніе, какъ показано на фигурѣ 2-ой.

Фиг. 2.



Таково устройство механизма, который, состоя изъ того же числа частей, какъ парлограммъ Ватта, даетъ движеніе болѣе приближающееся къ прямолинейному, имѣя съ нимъ восемь общихъ элементовъ. Въ этомъ очень легко удостовѣриться, опредѣляя разстояніе точки C отъ вертикали VV' (фиг. 1) въ функ-

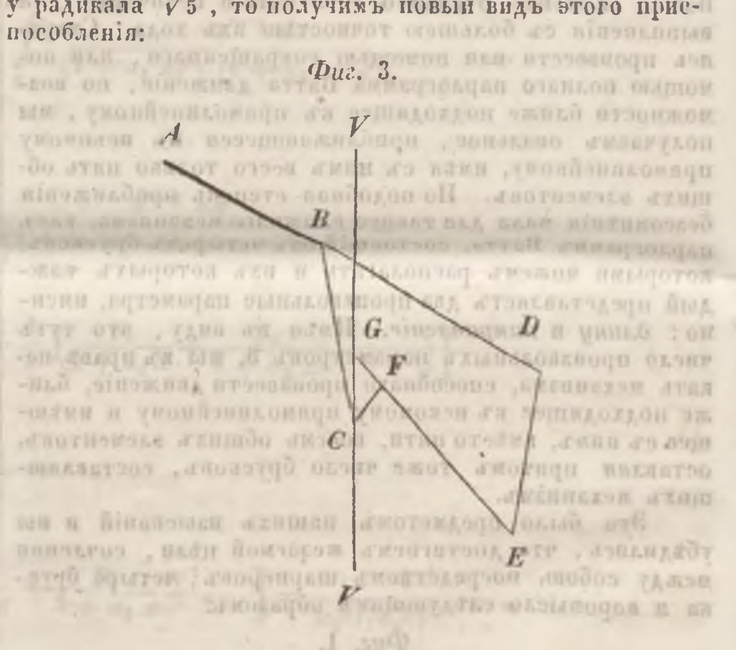
ціи наклоненія коромысла (*); потому что чрезъ это тотчасъ оказывается, что кривая, описываемая точкою C, въ точкѣ соотвѣтствующей горизонтальному положенію коромысла, касается вертикальной VV', съ которою она имѣетъ вблизи этой точки семь общихъ элементовъ, и что эта кривая пересѣкаетъ ту же вертикаль на разстояніи отъ G меньшемъ чѣмъ BC; это даетъ еще новый общій элементъ между этими линіями на протяженіи размаха точки C.

Изъ этого видно также, съ какою крайнею быстротою уменьшаются отклоненія точки C отъ вертикали VV' (фиг. 1), по мѣрѣ того, какъ амплитуда каченія коромысла уменьшается, въ силу того, что эти разстоянія суть седьмаго порядка въ отношеніи наклоненія коромысла. Что касается обыкновенныхъ случаевъ практики, гдѣ наклоненіе коромысла никогда недостигаетъ значительной величины; то нашъ механизмъ будетъ имѣть значитильное преимущество передъ парлограммомъ Ватта, относительно точности хода. Такъ напр. если возьмемъ случай, изложенный Прони въ его извѣстной статьѣ: *Sur le parallélogramme du balancier de la machine a feu* (Annales des mines, tome XII), гдѣ длина полу-коромысла есть 2,515 метра, брусокъ BC равенъ 0,7o2 метра, а предѣлъ наклоненія коромысла $17^0\ 35'\ 30''$; то найдемъ, что при этихъ условіяхъ нашъ механизмъ представляетъ уклоненія отъ вертикали меньшія 0,05 миллиметра. Но въ тѣхъ же обстоятельствахъ, согласно съ Прони, парлограммъ Ватта даетъ отклоненія въ 40 разъ большія, именно 2 миллиметра, и которыя не такъ малы, чтобы могли быть препебрегаемы въ ходѣ подобнаго механизма.

До сихъ поръ, стараясь по возможности приблизиться къ вертикальному прямолинейному движенію, мы брали въ разсмотрѣніе число элементовъ общихъ вертикали и кривой, описываемой точкою C, тогда какъ сближеніе этихъ линій и слѣдовательно точность выполненія механизмомъ требуемаго хода, много зависитъ и отъ расположенія этихъ элементовъ. Этотъ послѣдній вопросъ былъ предметомъ нашихъ изысканій въ 1-й части мемуара, подъ заглавіемъ: Théorie des mécanismes connus sous le nom des parallélogrammes de Watt (Mém. des savants étrangers, tome VII, 1854), гдѣ мы предложили способы, чтобы сдѣлать это сближеніе по возможности совершеннымъ. Прилагая эти способы къ разсматриваемому нами случаю, можемъ найти нѣкоторыя малыя измѣненія, которыя нужно сдѣлать въ величинахъ параметровъ механизма, чтобы ходъ былъ по возможности точенъ. Помощью этихъ поправокъ, отклоненія точки C отъ вертикали будутъ уменьшены почти въ пропорціи 1 къ 2^7 (§ 5 упом. мемуара); и какъ мы видѣли, что въ обыкновенныхъ случаяхъ практики эти отклоненія представляютъ весьма небольшія величины, именно сотыя доли миллиметра, то понятно, что посредствомъ упомянутой поправки элементовъ, точность хода механизма въ этихъ случаяхъ можетъ быть доведена до предѣловъ недоступныхъ техническимъ средствамъ постройки механизмовъ. Конечно нѣтъ никакой надобности для обыкновенныхъ случаевъ практики искать механизма, который былъ бы въ состояніи давать прямолинейное движеніе еще съ большимъ приближеніемъ. И какъ, сообразно съ тѣмъ, что мы показали, достигаемъ до этой степени точности посредствомъ механизма, составленнаго изъ того же числа частей, какъ и парлограммъ Ватта, нынѣ употребляемый, и недостатки хода котораго часто чувствительны для практики; то понятно, что нашъ механизмъ заслуживаетъ необходимаго вниманія.

Замѣтимъ еще, что если въ величинахъ, элементовъ этого механизма, данныхъ выше, измѣнимъ знакъ у радикала $\sqrt{5}$, то получимъ новый видъ этого приспособленія:

Фиг. 3.



(*) Эти разстоянія, какъ легко видѣть, выражаются формулой $\frac{\sqrt{5}+1}{4} AB\,(\cos\psi - \cos\varphi)$, гдѣ φ и ψ суть углы, которые въ функціи α, наклоненія коромысла, опредѣляются слѣдующими двумя уравненіями:

$$\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2},$$

$$\left(1 - \cos\alpha - \frac{\sqrt{5}+1}{4}\cos\varphi + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\cos\psi\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB} - \sin\alpha + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\sin\varphi + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\sin\psi\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Откуда получаемъ слѣдующую строку для приблизительнаго выраженія этихъ разстояній:

$$\frac{7-3\sqrt{5}}{32}\cdot\frac{AB^2}{BC^2}\,\alpha^7 + \frac{\sqrt{5}-2}{16}\cdot\frac{AB^2}{BC^2}\,\alpha^8 + \cdots\cdots$$

гдѣ

$$CF = FG = \frac{\sqrt{5}-1}{4} AB \quad ,$$

$$BD = EG = \frac{\sqrt{5}+1}{2} AB \quad ,$$

Для этого новаго вида степень точности хода механизма остается таже, только для постройки его необходимо будетъ продолжить коромысло за точку B на разстояніе: $BD = \frac{\sqrt{5}+1}{2} AB$, что конечно представляетъ большое практическое неудобство.

Примѣчаніе переводчика. Такъ какъ движеніе, сообщаемое полнымъ парлограммомъ Ватта, приближается къ прямолинейному неболѣе какъ и производимое механизмомъ Эвенса, или, что въ сущности тоже, такъ называемымъ (не вполнѣ сообразно), сокращеннымъ парлограммомъ Ватта, то полный его парлограммъ употребляется только въ случаяхъ, когда нужно направить движеніе двухъ стерженей: такъ наприм. въ паровыхъ машинахъ парлограммъ Ватта, преобразовывая прямолинейное качательное движеніе пароваго поршня въ круговое качательное движеніе коромысла, сообщаетъ прямолинейныя качанія стержню воздушнаго насоса.

Въ предыдущей же статьѣ Г. Академикъ Чебышевъ имѣлъ въ виду только движеніе одной точки. Такимъ образомъ для того, чтобы направить движеніе двухъ стержней посредствомъ механизма Г. Чебышева пришлось бы укрѣпить конецъ одного изъ нихъ въ точкѣ на линіи DE, ограничиваясь такою для него степенью приближенія къ прямолинейному движенію, какую въ состояніи дать и парлограммъ Ватта; или же придется соединить его посредствомъ шипа со стержнемъ укрѣпленнымъ къ точкѣ C, на подобіе того какъ это часто дѣлаютъ въ машинахъ прямаго дѣйствія съ охлажденіемъ пара, напр. въ машинахъ винтовыхъ пароходовъ.

Станиславъ Каминскій.

III.

Извлеченіе изъ письма Г-на Жбиковскаго.

По поводу замѣчанія Г. Износкова, помѣщеннаго въ № 36 В. М. Н.

Изъ равенства:

$$\frac{(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_m)^n-(u_1^n+u_2^n+u_3^n+\ldots+u_m)}{n}=K_n$$

очень просто выводится теорема Фермата.

Полагая $u_1=u_2=u_3=\ldots=u_m=1$ получимъ:

$$\frac{m\,(m^{n-1}-1)}{n}=K_n \quad .$$

Такъ какъ K_n цѣлое число, то n, будучи простымъ и не дѣлящимъ m, должно дѣлить $m^{n-1}-1$, или должно быть:

$$m^{n-1}-1\equiv 0 \ (мод.\ n) \ .$$

Алгебраическое выраженіе:

$$(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_m)^n-(u_1^n+u_2^n+u_3^n+\ldots+u_m^n)$$

дѣлится безъ остатка на n потому, что

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots a.1.2.3\ldots b.1.2.3\ldots c\ldots}$$

при $a+b+c+\ldots=n$ есть цѣлымъ числомъ.

Очень интересное доказательство сей послѣдней теоремы помѣщено въ Іюльской книжкѣ 1862 г. „Nouvelles annales de Mathematiques" Г-номъ *Лебегомъ*.

Прежде всего онъ доказываетъ, что разложивъ произведеніе

$$1.2.3\ldots n \ ,$$

которое для краткости будемъ обозначать чрезъ $n!$, на простые множители, т. е. полагая

$$n! = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots p^\pi \ldots ,$$

показатель простого числа p выражается формулою:

$$(2) \quad \pi = E\left(\frac{n}{p}\right)+E\left(\frac{n}{p^2}\right)+E\left(\frac{n}{p^3}\right)+\ldots+E\left(\frac{n}{p^i}\right) ,$$

въ которой $E\left(\frac{n}{p^k}\right)$ изображаетъ цѣлое частное отъ раздѣленія n на p^k. $\left(E\left(\frac{n}{p^k}\right)=0 \text{ когда } p^k>n\right)$.

Въ самомъ дѣлѣ, для полученія показателя p въ произведеніи $n!$, нужно разсматривать только сомножители его

$$p \ , 2p \ , 3p \ , \ldots E\left(\frac{n}{p}\right).\, p \ ,$$

которыхъ произведеніе дастъ

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots E\left(\frac{n}{p}\right).\, p^{E\left(\frac{n}{p}\right)} .$$

Въ произведеніи

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots E\left(\frac{n}{p}\right)$$

нужно опять разсматривать сомножители

$$p \ , 2p \ , 3p \ , \ldots E\left(\frac{n}{p^2}\right).\, p \ ,$$

которыхъ произведеніе дастъ:

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots E\left(\frac{n}{p^2}\right).\, p^{E\left(\frac{n}{p^2}\right)} .$$

Продолжая разсужденіе дальше ясно, что

$$\pi = E\left(\frac{n}{p}\right)+E\left(\frac{n}{p^2}\right)+E\left(\frac{n}{p^3}\right)+\ldots+E\left(\frac{n}{p^i}\right).$$

Дальше Г-нъ Лебегъ доказываетъ что ежели

$$n = a + b + c + \dots$$

то

$$E\left(\frac{n}{p^i}\right) \geqq E\left(\frac{a}{p^i}\right) + E\left(\frac{b}{p^i}\right) + E\left(\frac{c}{p^i}\right) + \dots \quad (3)$$

Это слѣдуетъ непосредственно изъ равенства

$$\frac{n}{p^i} = \frac{a}{p^i} + \frac{b}{p^i} + \frac{c}{p^i} + \dots$$

представленнаго подъ видомъ:

$$E\left(\frac{n}{p^i}\right) + f = E\left(\frac{a}{p^i}\right) + f' + E\left(\frac{b}{p^i}\right) + f'' + E\left(\frac{c}{p^i}\right) + f''' + \dots$$

въ которомъ $f, f', f'', f''', \dots$ суть правильныя дроби.

Въ случаѣ, когда сумма $f' + f'' + f''' + \dots < 1$, то въ выраженiи (3) будетъ знакъ равенства; ежели же эта сумма будетъ превосходить единицу, то въ выраженiи (3) будетъ знакъ $>$

Послѣ сихъ двухъ теоремъ дѣлается совершенно яснымъ что

$$\frac{n!}{a!\, b!\, c!}$$

должно быть цѣлымъ числомъ

Разложивъ числителя и знаменателя на простые множители, показатель простого числа p въ числителѣ выразится формулою

$$\pi = E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + E\left(\frac{n}{p^3}\right) + \dots + E\left(\frac{n}{p^i}\right),$$

а показатель тогоже простого числа p въ знаменателѣ будетъ

$$\pi' = E\left(\frac{a}{p}\right) + E\left(\frac{a}{p^2}\right) + \dots + E\left(\frac{b}{p}\right) + E\left(\frac{b}{p^2}\right) + \dots$$
$$+ E\left(\frac{c}{p}\right) + E\left(\frac{c}{p^2}\right) + \dots;$$

но такъ какъ

$$E\left(\frac{n}{p}\right) \geqq E\left(\frac{a}{p}\right) + E\left(\frac{b}{p}\right) + \dots$$

$$E\left(\frac{n}{p^2}\right) \geqq E\left(\frac{a}{p^2}\right) + E\left(\frac{b}{p^2}\right) + \dots$$

. . . .

то $$\pi \geqq \pi',$$

т. е. показатель всякаго простого множителя въ числителѣ = или превосходитъ показателя тогоже простого числа въ знаменателѣ.

На основанiи (2) равенства легко вывести формулу Г-на *Чебышева.*

Ежели условимся обозначать произведенiе всѣхъ простыхъ чиселъ не превышающихъ n чрезъ $P(n)$ то:

$$(4) \quad n! = P(n) \,.\, P\left(\frac{n}{2}\right) . P\left(\frac{n}{3}\right) \dots P\left(\frac{n}{i}\right)$$

$$\times P(\sqrt{n}) \,.\, P\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) P\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) \dots P\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right)$$

$$\times P(\sqrt[3]{n}) \,.\, P\left(\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\right) . P\left(\sqrt[3]{\frac{n}{3}}\right) \dots P\left(\sqrt[3]{\frac{n}{i}}\right)$$

. . . .

$$\times P(\sqrt[k]{n}) \,.\, P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right) P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{3}}\right) \dots P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{i}}\right)$$

. . . .

Въ самомъ дѣлѣ, наибольшiй показатель простого множителя p въ произведенiи:

$$P(\sqrt[k]{n}) \,.\, P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right) . P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{3}}\right) \dots P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{i}}\right)$$

равняется $E\left(\frac{n}{p^k}\right)$, ибо послѣднiй множитель $P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{i}}\right)$, заключающiй p долженъ быть таковъ, чтобы:

$$\sqrt[k]{\frac{n}{i}} \geqq p > \sqrt[k]{\frac{n}{i+1}}$$

откуда слѣдуетъ что $n \geqq p^k \,.\, i$, $p^k(i+1) > n$

или $\frac{n}{p^k} \geqq i$, а $i + 1 > \frac{n}{p^k}$, $i + 1 > \frac{n}{p^k} \geqq i$

и слѣд. $i = E\left(\frac{n}{p^k}\right)$.

Такимъ образомъ показатель простого множителя p во всемъ произведенiи (4) оказывается

$$E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + E\left(\frac{n}{p^3}\right) + \dots + E\left(\frac{n}{p^k}\right),$$

т. е. тотъ-же самый, каковъ долженъ быть въ разложенiи $n!$ на простые множители. Этимъ доказывается равенство (4).

Ежели въ равенствѣ (4) обозначимъ произведенiе

$$P\left(\frac{n}{i}\right) . P\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right) . P\left(\sqrt[3]{\frac{n}{i}}\right) \dots P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{i}}\right) \dots$$

чрезъ $P_i(n)$ то будетъ

$$n! = P_1(n) \,.\, P_2(n) \,.\, P_3(n) \dots P_k(n) \dots$$

Взявъ логарифмы обѣихъ частей сего равенства получится формула Г-на Чебышева, при помощи которой онъ доказалъ что *»ежели $a > 3$, то покрайней мѣрѣ одно простое число находится между a и $2a-2$.«*

Минскъ, 16 Января 1863 г. *А. Жбиковскiй.*

Типографiя А. Марциновскаго. — ВИЛЬНО. 1862 г. Февраля 3-го. — Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*